数理解析研究所講究録
929巻 1995年 161-169

$A_{r-1}^{(1)}$ の基本表現と Littlewood-Richardson 係数

中島達洋（都立大・理・物理）

§0 Introduction

0.1. アフィン・リー環 $A_{r-1}^{(1)}$ の基本表現（basic 表現）は，既約最高ウエイト表現であり，無限変数の多項式環上に実現できることが知られている．この表現は $\mathfrak{gl}(\infty)$ の作用の特殊化（制限）をすることによって得ることができるが，$\mathfrak{gl}(\infty)$ の表現空間が Schur 函数で張られる空間全体になっているのに対し，$A_{r-1}^{(1)}$ の作用は変数の reduction をした部分空間を不変にし，その部分空間上に基本表現が実現される．

ここで問題にするのは，Schur 函数で機械的に変数を落とした被約（reduced）Schur 函数を考えたときに，それがそのままウエイトベクトルとなっているのか，そうなっている場合に基底はどのように特徴付けられるのか，ということである．これに答えを与えるのが本講演の目的である．その中で，被約（reduced）Schur 函数たちの間に線型関係式があり，そこに一般線型群のテンソル積表現の既約分解に現れる Littlewood-Richardson 係数が登場することを見る．

0.2. 本講演は，東京商船大学の有木進氏と，東京都立大学の山田裕史氏[†]との共同研究に基づくものである [ANY1,2,Y].

§1 Schur 函数, r-core & r-quotient

1.1. Schur 函数はいろいろな形で表すことができる [M] が，ここでは次のように定義しよう．サイズが N であるようなヤング図形（分割）$\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ に対して，

$$S_\lambda(t)=\sum_\pi \chi_\lambda(\pi)\frac{t_1^{\pi_1}t_2^{\pi_2}\cdots}{\pi_1!\pi_2!\cdots}.$$

ここで，$\chi_\lambda(\pi)$ は対称群 $\mathfrak{S}_N$ の λ に対応する既約表現の指標のサイクルタイプ $\pi=(1^{\pi_1}2^{\pi_2}\cdots)$ $(|\pi|=N)$ に対応する共役類の上での値で，和はこの π に渡ってとるものとする．本来の

[†]この原稿が完成した 10 月 4 日は、奇しくも指導教官である山田裕史氏の 39 回目の誕生日であった．これを祝して本原稿を山田裕史氏に献呈する．

Schur 函数は $GL(N,\mathbb{C})$ の元の固有値の対称函数であるが，そうした表示とは $t_j = p_j/j$ （p_j は固有値の j 次の冪和）で移り合う．

1.2. r- 被約 Schur 函数とは，Schur 函数において $j \equiv 0 \pmod r$ の添字を持つ変数 t_j を全てゼロと置いたもの，すなわち，

$$S_\lambda^{(r)}(t) = S_\lambda(t)|_{t_r=t_{2r}=t_{3r}=\cdots=0}$$

のことである．

1.3. 1.3 から 1.7 までの議論は主として Olsson の講義録 [O] に基づくものである．

与えられた Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ に対して，$\beta_j = \lambda_j + (n-j)$ によって減少列 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ を定めることができる．この β を λ の β-set という．なお，ソリトン理論等で用いられたマヤ図形を知っている人ならば，これがそのマヤ図形と等価の概念であることはすぐにわかると思う [S].

1.4. 自然数 r をひとつ定めたとき，Young 図形 λ が r-core であるとは，λ が長さ r の hook を 1 つも持たないことをいう．また，任意の Young 図形 λ に対して，長さ r の hook を可能な限り全て抜いていく操作を行うことで，r-core の図形が一意に定まる．すなわち，途中の r-hook の抜き方には依らない．こうして得られた Young 図形を，Young 図形 λ の r-core と呼び，λ^c と書くことにする．

上述の操作に対して，λ^c を得るまでに抜いていく r-hook の深さ（足の長さ）の総和の偶奇もやはり途中経過に依らないことが知られている．この総和を b としたとき，λ の固有の符号として $\delta_r(\lambda) = (-1)^b$ が定義できる。これを Young 図形 λ の r-sign という．

1.5. 前節と同様に r を固定する．必要ならば末尾にゼロを加えることで part の数 n が r で割り切れるようにした Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ に対する β-set $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ を考える．$k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$ のそれぞれに対して，

$$\beta[k] = \{\gamma^{(k)} \in \mathbb{N};\ \exists j,\ r\gamma^{(k)} + k = \beta_j\}$$

とおく．今，$\beta[k] = \{\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \ldots, \gamma_{m_k}^{(k)}\}$ $(\gamma_1^{(k)} > \gamma_2^{(k)} > \cdots > \gamma_{m_k}^{(k)})$ が得られたとすると，これから $\lambda[k]_j = \gamma_j^{(k)} - (m_k - j)$ によって Young 図形 $\lambda[k]$ をつくることができる．こうしてつくった Young 図形の r- 組 $\lambda^q = (\lambda[0], \lambda[1], \ldots, \lambda[r-1])$ を λ の r-quotient という．始めに $n \equiv 0 \pmod r$ としたのは，λ^q の cyclic purmutation の不定性を消すためである．

r-quotient は，直観的には，core にどのように r-hook たちが付いているのかを示すものと思えば良いだろう．

1.6. （例）$r = 3$, $\lambda = (6, 5, 3, 2, 1, 0)$ の場合

このとき $\beta = \{11, 9, 6, 4, 2, 0\}$．次のような β-set の"abacus" をつくると考えやすい．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \beta[0] & \beta[1] & \beta[2] & & & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & 1 & 2 & & 0 & 1 & 2 \\
1 & \longrightarrow & 3 & 4 & 5 & & 3 & 4 & 5 \\
2 & \longrightarrow & 6 & 7 & 8 & \xrightarrow{\qquad\qquad} & 6 & 7 & 8 \\
3 & \longrightarrow & 9 & 10 & 11 & & 9 & 10 & 11 \\
4 & \longrightarrow & 12 & 13 & 14 & & 12 & 13 & 14
\end{array}
$$

これより，$\beta[0] = (3, 2, 0)$, $\beta[1] = (1)$, $\beta[2] = (3, 0)$ となることがわかる．よって，$\lambda^q = (\lambda[0], \lambda[1], \lambda[2]) = ((1, 1), (1), (2))$．また，この abacus 上で丸を 1 つ上にずらすことと λ から 3-hook を 1 つ抜くこととが対応するので，右上の図のように全ての丸を上につめてしまった abacus を読むことで，3-core の β-set を得る．すなわち，$\beta_{core} = (6, 5, 3, 2, 1, 0)$ で，したがって $\lambda^c = (1, 1)$．

1.7. 注 **1.** Young 図形 λ と Young 図形の $(r+1)$- 組 $(\lambda^c; \lambda^q)$ とは 1 対 1 に対応する．

注 **2.** 作り方からもわかるように，$|\lambda| = |\lambda^c| + r|\lambda^q|$．但し，$|\lambda^q| = \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda[k]|$．

注 **3.** 前節で見た abacus は，多成分 KP 方程式系の理論ででてきた r 本のマヤ図形と同じものである．実際，佐藤幹夫先生の講義録 [S] を見ると，core や quotient のことがでている．

§2 $A_{r-1}^{(1)}$ の基本表現

2.1. ここで $A_{r-1}^{(1)}$ の基本表現についての詳細は述べないが, 以下の議論に必要なことをまとめておくことにする [K].

アフィンリー環 $A_{r-1}^{(1)}$ の基本表現は, 既約な最高ウエイト表現であって, 最高ウエイト Λ_0 は $\langle\alpha_i^\vee, \Lambda_0\rangle = \delta_{i0}$ and $\langle d_0, \Lambda_0\rangle = 0$ を満たす. ここで $\{\alpha_i^\vee\}$ $(i = 0, \ldots, r-1)$ は単純ルート $\{\alpha_i\}$ の双対である. また, $\delta = \sum_{j=0}^{r-1}\alpha_j$ で定義される虚ルートも導入しておくことにする.

良く知られているように, ウエイトの全体には Weyl 群 W が作用していて, 基本表現の全てのウエイトは

$$P = \{w\Lambda_0 - n\delta; w \in W,\ n \in \mathbb{N}\}$$

の形に表すことができる. Weyl 群の Λ_0 を通る軌道は極大ウエイトと言われるが, その意味する所は $+\delta$ の行き先はもはやウエイトにはなっていないということである.

2.2. $A_{r-1}^{(1)}$ の基本表現の多項式環 $V^{(r)} = \mathbb{C}[t_j; j \in \mathbb{N}_+, j \not\equiv 0 \bmod r]$ の上での実現は, いわゆる頂点作用素を用いて行なわれる [KKLW]. 今,

$$a_j = \frac{\partial}{\partial t_j}, \quad a_{-j} = jt_j \quad (j \in \mathbb{N}_+, j \not\equiv 0 \mathrm{mod}\ r)$$

とし, $r-1$ 個の頂点作用素を

$$\begin{aligned} X^{(a)}(p) &= \frac{\omega^a}{\omega^a - 1}\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}(1-\omega^{aj})p^j a_{-j}\right)\exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}(1-\omega^{-aj})p^{-j}a_j\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k^{(a)}(\omega)p^k \ (a = 1, \ldots, r-1) \end{aligned}$$

とする. ここに ω は 1 の原始 r 乗根である. このとき,

$$\{1, a_j, X_k^{(a)}(\omega); j \in \mathbb{Z}, j \not\equiv 0 \bmod r,\ k \in \mathbb{Z},\ a = 1, \ldots, r-1\}$$

の作用が $A_{r-1}^{(1)}$ の V 上の表現を与え, それが基本表現に同型になっている.

この表現において, 極大ウエイトベクトルが

$$\{S_{\lambda^c}(t);\lambda^c は\ r\text{-core}\}$$

で与えられ, これが r- 被約 KP 方程式系の斉次多項式解になっている, ということは伊達 - 神保 - 柏原 - 三輪 [DJKM, JM] によって 80 年代初頭に示された. 極大ウエイトベクトルである Schur 函数は, 定義より, もともと r- 被約になっていることをここで注意しておこう. これより, 極大ウエイトは r-core の Young 図形 λ^c で特徴付けられるわけで, $S_{\lambda^c}(t)$ のウエイトを $\Lambda(\lambda^c)$ と表す. そうすると, 一般のウエイトは $\Lambda(\lambda^c)-n\delta$ と書かれ, そのウエイト空間も λ^c と自然数 n とで定まるものときたいされる. 極大ウエイトから $n\delta$ $(n\geq 1)$ 下がった一般のウエイトに対するウエイトベクトル（の基底）を r- 被約 Schur 函数が具体的に与えることを次節で見ることにしよう.

§3　被約 Schur 函数の関係式とウエイト空間の基底

3.1. 変数を落としていることから, r- 被約 Schur 函数たちは当然一次独立でない. そこで, $V^{(r)}=\mathbb{C}[t_j;j\in\mathbb{N}_+,j\not\equiv 0 \bmod r]$ の適当な基底を選ぶ必要がある.

3.2. <u>命題</u>　λ の quotient が

$$\lambda^q=(\emptyset,\lambda[1],\lambda[2],\ldots,\lambda[r-1])$$

となる r- 被約 Schur 函数 $S_\lambda^{(r)}(t)$ は, 多項式環 $V^{(r)}=\mathbb{C}[t_j;j\in\mathbb{N}_+,\ j\not\equiv 0\,(\bmod\ r)]$ の基底をなす.

3.3. 命題 3.2 の証明の詳しいことはここには書かないが, 鍵になるのは次の補題である.
<u>**補題**</u>　$\mathcal{M}=\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)\in\mathbb{Z}^\infty\ ;\ \alpha_{i+1}=\alpha_i-1\ (i\gg 0)\}$ とし, ベクトル空間 U と $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{M}}\subset U$ に対し, 次の性質が満たされるとする. (1) $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$, $\beta=(\beta_1+1,\beta_2+1,\ldots)$ に対し, $u_\alpha=u_\beta$.
(2) $\mathfrak{S}_\infty=\bigcup_{l\geq 1}\mathfrak{S}_l$ とし, $\sigma\in\mathfrak{S}_\infty$ の $\mathcal{M}$ への作用を $\sigma\alpha=(\alpha_{\sigma(1)},\alpha_{\sigma(2)},\ldots)$ とするとき, $u_{\sigma\alpha}=\mathrm{sgn}(\sigma)u_\alpha$.

(3) $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$, $j\in\mathbb{N}_+$ に対し, $\alpha+jr\epsilon_i=(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+jr,\ldots)$ と書くとき, $\sum_{i\in N_+} u_{\alpha+jr\epsilon_i}=0$.

このとき線型写像 $\phi : U \longrightarrow V^{(r)}$ が存在して, $\phi(u_\alpha) = S_\lambda^{(r)}(t)$. 但し, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \mathcal{M}$ は, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, 0, 0, \ldots)$ に対して, $\alpha_i = \lambda_i + (n-i)$ $(i \in \mathbb{N}_+)$ により定めた. (この対応で得られた $\alpha \in \mathcal{M}$ は β-set を半無限列に拡張したものになっている.)

これを r=1 として用いると $V^{(r)}$ が $\{S_\lambda^{(r)}(t)\ ;\ \lambda[0] = \emptyset\}$ で張られることがわかり, さらに各次数での次元の勘定をすることで, 基底になっていることが示される.

3.4. <u>主定理</u> λ を任意の Young 図形, λ^c および $\lambda^q = (\lambda[0], \lambda[1], \ldots, \lambda[r-1])$ をそれぞれ λ の r-core, r-quotient とする. このとき, r- 被約 Schur 函数 $S_\lambda^{(r)}(t)$ に対し次の線型関係式

$$S_\lambda^{(r)}(t) = (-1)^{|\lambda[0]|}\delta_r(\lambda) \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_{r-1},\mu} LR^{\lambda[0]'}_{\nu_1\cdots\nu_{r-1}} LR^{\mu[1]}_{\nu_1\lambda[1]} \cdots LR^{\mu[r-1]}_{\nu_{r-1}\lambda[r-1]} \delta_r(\mu) S_\mu^{(r)}(t)$$

が成り立つ. ここで和は $r-1$ 個の Young 図形 $\nu_1, \ldots, \nu_{r-1}$, および $\mu^c = \lambda^c$, $\mu[0] = \emptyset$ を満たす Young 図形 μ を走り, $\lambda[0]'$ は $\lambda[0]$ の転置である. LR は Littlewood-Richardson 係数である.

3.5. Littlewood-Richardson 係数は, 要するに Schur 函数の積を線型化するときの係数のことで

$$S_\lambda(t)S_\mu(t) = \sum_\nu LR^\nu_{\lambda\mu} S_\nu(t)$$

と定義される [M]. Young 図形を使った組合せ論的な計算法についても有名である. 定理中にある添字がたくさんあるものは, 上の定義を一般化した

$$S_{\lambda^1}(t)S_{\lambda^2}(t)\cdots S_{\lambda^k}(t) = \sum_\mu LR^\mu_{\lambda^1\lambda^2\ldots\lambda^k} S_\mu(t)$$

から得られる.

定理の証明は, 右辺の展開式が補題3.3 の条件を満たすことを直接計算によって示し, その帰結の線型写像が恒等写像であることを見ることで為されるが, その際には Littlewood-Richardson 係数の次の公式 [M; p.70]

$$S_\lambda(x,y) = \sum_{\mu,\nu} LR^\lambda_{\mu\nu} S_\mu(x) S_\nu(y)$$

が重要である．ここでの変数 $x=(x_1,x_2,\ldots)$, $y=(y_1,y_2,\ldots)$ はこれまでの t とは異なる，対称函数としての変数になっている．Schur 函数を生成元とする代数，あるいは Young 図形のつくる代数 $\mathcal{A}=\sum_{\lambda:\text{Young 図形}}\mathbb{Z}\lambda$ には，この式により余積の構造が入り，$\mathcal{A}$ は余代数になる [S].

3.6. 命題 3.2, 主定理 3.4 の線型関係式およびボゾン - フェルミオン対応とを考え合わせると，core として λ^c を持ち，$|\lambda^q|(=\sum_{k=0}^{r-1}|\lambda[k]|)=n$ となる Young 図形 λ がパラメトライズする被約 Schur 函数 $S_\lambda^{(r)}(t)$ が確かにウエイト $\Lambda(\lambda^c)-n\delta$ を持つウエイトベクトルになっていることがわかる．r- 被約 Schur 函数が与える基底（$\lambda[0]=\emptyset$）の個数とこのウエイト空間の次元とが等しいことは string 函数を使って簡単にチェックできる．したがって，

<u>定理</u>　λ を Young 図形，λ^c および $\lambda^q=(\lambda[0],\ldots,\lambda[r-1])$ をそれぞれ λ の r-core, r-quotient とし，さらに $|\lambda^q|=n$ であると仮定する．このとき，

(1) 全ての r- 被約 Schur 函数 $S_\lambda^{(r)}(t)$ は $A_{r-1}^{(1)}$ の基本表現において，ウエイト $\Lambda(\lambda^c)-n\delta$ を持つウエイトベクトルである．

(2) r- 被約 Schur 函数の集合 $\{S_\lambda^{(r)}(t);\lambda[0]=\emptyset\}$ はウエイト $\Lambda(\lambda^c)-n\delta$ のウエイト空間の基底となる．

3.7. ここで得られたものと同様の結果をアフィンリー環 $A_{2l}^{(2)}$ の場合にも得ることができる [NY1,2]．その際には Schur 函数の代わりに Schur の Q- 函数が現れ，Littlewood-Richardson 係数の対応物として

$$2^{-\ell(\lambda)}Q_\lambda(t)S_\mu(t)=\sum_\nu NY_{\lambda\mu}^\nu S_\nu(t)$$

によって定義される係数 NY が登場する．

§4　対称群の modular 表現との関係

4.1. $r=p$ が素数のとき，主定理 3.2 は対称群の p-modular 表現の p- 正則類（つまり，共役類 $\pi=(1^{\pi_1}2^{\pi_2}\cdots)$ であって，$\pi_{jr}=0$ $(j\in\mathbb{N}_+)$ を満たすもの）の上の指標の関係式とみなすこ

とができる．言い換えると，$\chi_\lambda(\pi)$ を $\mathfrak{S}_N$ の表現 λ の通常既約指標の共役類 π における値であるとすると，行列 $\chi_N^{(p)} = (\chi_\lambda(\pi))_{\substack{|\lambda|=|\pi|=N \\ \pi:p\text{-}\text{正則類}}}$ の行の間の関係式を与えていることになっている．

4.2. 対称群の標数 p の既約表現はいわゆる p- 正則分割（分割 $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\cdots)$ であって，$0 \leq m_i \leq p-1$ $(i \in \mathbb{N}+)$ をみたすもの）でパラメトライズされている [JK]. p- 正則分割の個数と p- 正則類の個数は等しいことはすぐに確かめられる．その表現 λ の既約 Brauer 指標の p- 正則類 π 上での値を $\phi_\lambda(\pi)$ と書いたとき，正則行列 $(\phi_\lambda(\pi))_{\lambda,\,\pi}$ を $\phi_N^{(p)}$ と書く．

標数 0 のときに既約であった Specht 加群は標数 p においては一般に既約ではなく，その組成列中にどのような既約表現がどのくらい現れるかを表す行列 $D_N^{(p)} = (d_{\lambda\mu})_{\substack{|\lambda|=|\mu|=N \\ \mu:p\text{-}\text{正則}}}$ を分解行列という．

4.3. 前節で導入した行列の間には

$$D_N^{(p)}\phi_N^{(p)} = \chi_N^{(p)}$$

という関係が成り立っている．これより，主定理 3.4 の式は分解行列 $D_N^{(p)}$ の行の間の関係式でもあることがわかる．

さらに，対称群の岩堀 -Hecke 環 $H_N(q)$ において q を 1 の原始 p 乗根に特殊化したものの分解行列の行の間の関係式を与えるということも示すことができる．

References

[ANY1] S. Ariki, T. Nakajima and H.-F. Yamada, 'Weight vecters of the basic $A_1^{(1)}$-module and the Littlewood- Richardson rule', J.Phys. A: Math. Gen. 28 (1995) L357–L361.

[ANY2] S. Ariki, T. Nakajima and H.-F. Yamada, 'Reduced Schur functions and the Littlewood-Richardson coefficients', Preprint.

[DJKM] E. Date, M. Jimbo, M.Kashiwara and T. Miwa, 'Transformation groups for soliton equations. Euclidean Lie algebras and reduction of the KP hierarchy', *Publ. RIMS.* 18 (1982) 1077–1110.

[JK] G. James and A. Kerber, 'The Representation Theory of the Symmetric Groups' Addison-Wesley (1981).

[K] V. Kac, 'Infinite Dimensional Lie Algebras, 3rd ed.' Cambridge (1990).

[KKLW] V. Kac, D. Kazhdan, J. Lepowsky and R. L. Wilson 'Realization of the basic representation of the Euclidean Lie algebras', *Adv. Math.* 42 (1981) 83–112.

[JM] M. Jimbo and T. Miwa, 'Solitons and infinite dimensional Lie algebras', *Publ. RIMS.* 19 (1983) 943–1001.

[M] I. G. Macdonald, 'Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd ed.' Oxford (1995).

[NY1] T. Nakajima and H.-F. Yamada, 'Basic representations of $A_{2l}^{(2)}$ and $D_{l+1}^{(2)}$ and the polynomial solutions to the reduced BKP hierarchies', *J. Phys. A: Math. Gen.* 27 (1994) L171–176.

[NY2] T. Nakajima and H.-F. Yamada, 'Reduced Q-functions' Preprint.

[O] J. B. Olsson 'Combinatorics and Representations of Finite Groups' Lecture Notes, University of Essen, vol. 20 (1993).

[S] 佐藤幹夫, '佐藤幹夫講義録（梅田亨 記）', 数理解析レクチャーノート 5 (1989).

[Y] 山田裕史, '基本表現のウエイトベクトルとシューア函数', 第12回代数的組合せ論シンポジウム報告集 (1995).